

Il Principio di Indeterminazione

PdI

C. Cosmelli

Dipartimento di Fisica, Sapienza Università di Roma

PLS
20.1.2017



DIPARTIMENTO DI FISICA

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

0. Cosa

1. Cosa **non** è il Pdl
 - a. Il caos e l'indeterminazione in Fisica classica
 - b. Cosa è (oggi) il caos

2. 1927 W. Heisenberg – il Pdl
 1. Cosa dice
 2. Le due versioni
 3. Il significato
 4. Qualche calcolo
 5. Come funziona

1. l'Indeterminazione classica

INDETERMINAZIONE CLASSICA

- ❖ - P. S. Laplace 1776: le certezze.
- ❖ - L. Boltzmann 1897: l'incertezza 1.
- ❖ - H. Poincaré 1903: l'incertezza 2.
- ❖ - E. N. Lorentz 1963: il caos deterministico.

La fisica classica del XX secolo:

- ❖ Attribuisce significato scientifico alla parola “caos” (deterministico).
- ❖ Lega il caos allo sviluppo di nuove strutture, alla vita, alla teoria delle catastrofi, ai frattali, alle Reti ed alle strutture emergenti.

1.1 Passato Remoto -1776

❖ [Pierre Simon Laplace, 1776, le certezze.](#)

❖ Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; [per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro proprio come il passato sarebbe evidente davanti ai suoi occhi.](#) (da *Essai philosophique sur les probabilités*)

1.2 Passato - 1897

- ❖ [Ludwig Boltzmann, 1897, l'incertezza 1.](#)

- ❖ Se per spiegazione meccanica della natura intendiamo quella che poggia sulle leggi della meccanica usuale, dobbiamo allora dichiarare che è del tutto incerta la possibilità che l'atomismo del futuro continui ad essere una spiegazione meccanica della natura.

- ❖ Se ho molte particelle è la statistica che comanda...

- ❖ La Termodinamica utilizza delle grandezze che sono delle medie statistiche su molte particelle. Ma le particelle sono tante ($\sim 10^{20}$... 10^{23}). Il risultato è che i valori delle grandezze possono essere **molto** precisi, (il punto triplo dell'acqua).

1.4 Passato - 1903

❖ Henri Poincaré 1903, l'incertezza 2.

“Una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto, che è governato da leggi. Ma non è così, **può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito**”. (da *Science et méthode*).

1.5 L'altro ieri - 1963

❖ Edward N. Lorenz, 1963, il caos deterministico

Mentre stava preparando una previsione meteorologica che aveva iniziato introducendo nel computer vari parametri quantificati in numeri con **sei cifre decimali**. Riprendendo poi il lavoro dopo un'interruzione pensò bene di abbreviare il compito del computer **riducendo a tre le cifre decimali** dei parametri, considerato che esse erano più che sufficienti per assicurare la precisione scientifica dei risultati; ma quando li ebbe davanti agli occhi non poté che strabiliare constatando **l'abissale difformità riscontrata tra questi e quelli** che si sarebbe ragionevolmente aspettato in base ai parametri impostati. Lorenz si rese allora conto che il tempo atmosferico costituisce un esempio di sistema **non lineare molto complesso** e che quella infinitesima modifica apportata ai parametri meteorologici si era ingigantita a dismisura nel corso del successivo sviluppo fino a sfociare in un **risultato finale del tutto diverso ed imprevedibile.**" [da S. Grieco, *La conoscenza scientifica*. 1998].

1.6 Cosa è il caos

- ❖ E' caotico un sistema dinamico **non lineare**, in cui piccole differenze nelle condizioni iniziali danno luogo a evoluzioni temporali molto diverse; per esempio una palla lanciata in aria non è un fenomeno caotico. Una palla in un biliardo che urta altre palle sì.
- ❖ **Sistema non lineare**: $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$, $f(kx) \neq k f(x)$
 - ❖ raddoppiando le cause non raddoppiano gli effetti. L'evoluzione di un sistema composto non è a priori scomponibile nell'evoluzione dei suoi sottosistemi. Non è riducibile.
- ❖ **Un sistema caotico non è necessariamente un sistema puramente casuale: spesso il caos segue leggi deterministiche →**
caos deterministico

[Attenzione:casualità o imprevedibilità, deterministica, non caotica = π]

1.7 Caratteristiche del caos deterministico

- **Sensibilità alle condizioni iniziali:** a variazioni infinitesime delle condizioni al contorno (o, genericamente, degli **ingressi**) corrispondono variazioni finite in uscita.
- **Imprevedibilità:** non si può prevedere in anticipo l'andamento del sistema **su tempi lunghi** rapportati al tempo caratteristico del sistema a partire da assegnate condizioni al contorno.
- **L'evoluzione** del sistema è descritta, nello spazio delle fasi, da innumerevoli *orbite* ('traiettorie di stato'), diverse tra loro con evidente componente casuale agli occhi di un osservatore esterno, e che restano tutte confinate entro un certo spazio definito: il sistema cioè non evolve verso l'infinito per nessuna variabile.

1.8 Il caos 1

❖ <http://www.ensta-paristech.fr/~perez/pendule/TriplePendulum.html>

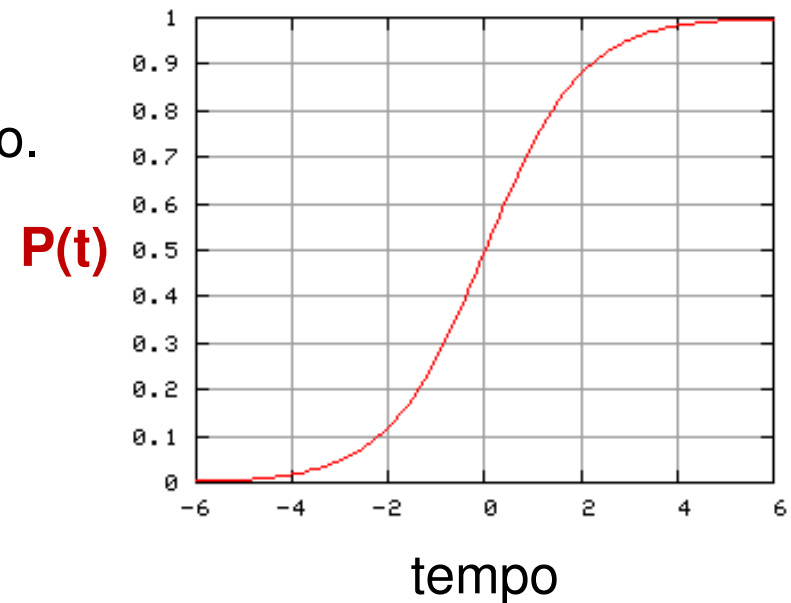


Vediamo cosa succede per un sistema che può diventare caotico.
Un esempio storico...il primo?

P.F. Verhust – 1845: la curva logistica per
l'andamento di una popolazione con il tempo.

P(t) = Popolazione

Dipende da P_0 = Popolazione iniziale
da r = Tasso di crescita
 k = risorse disponibili



$$\frac{dP}{dt} = r \cdot P \left(1 - \frac{P}{k} \right)$$

1.9 Il caos 2

Qualche esempio numerico $P(t)$ variando r , il tasso di crescita. $P_0=0,1$

1 popolazione

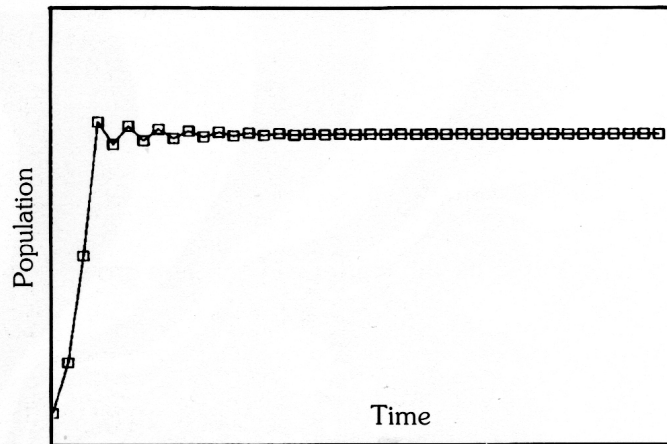


Fig. 17. $r=1.8$

2 popolazioni

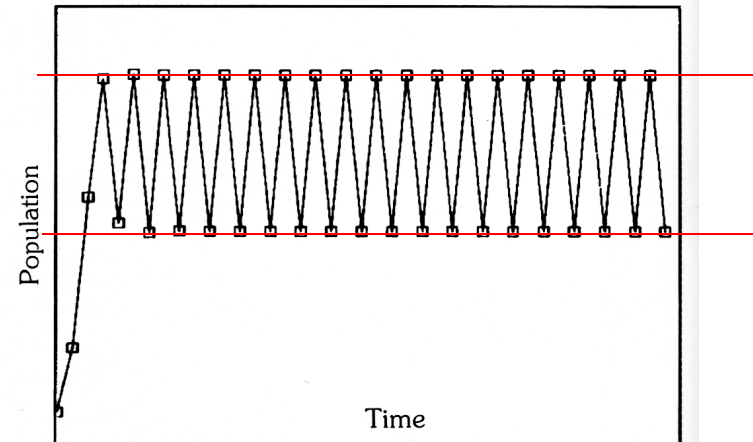


Fig. 18. $r=2.3$

4 popolazioni

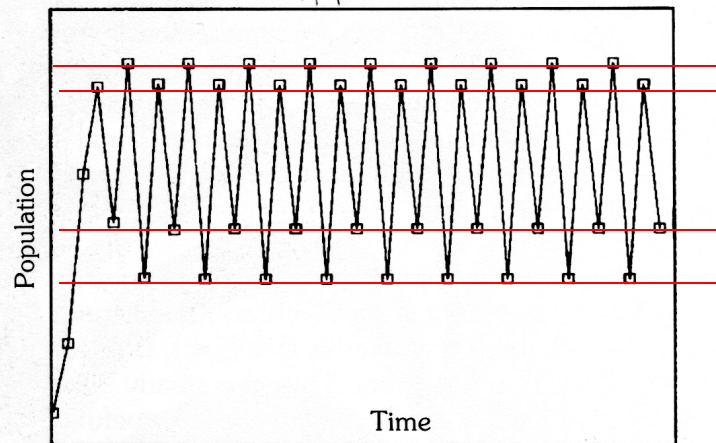


Fig. 19. $r=2.5$

>8 popolazioni

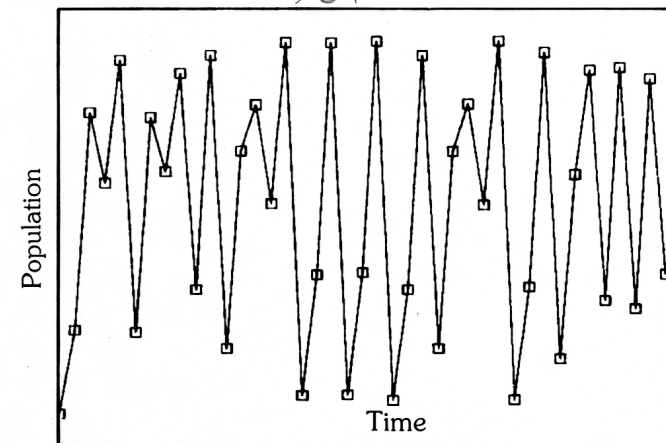
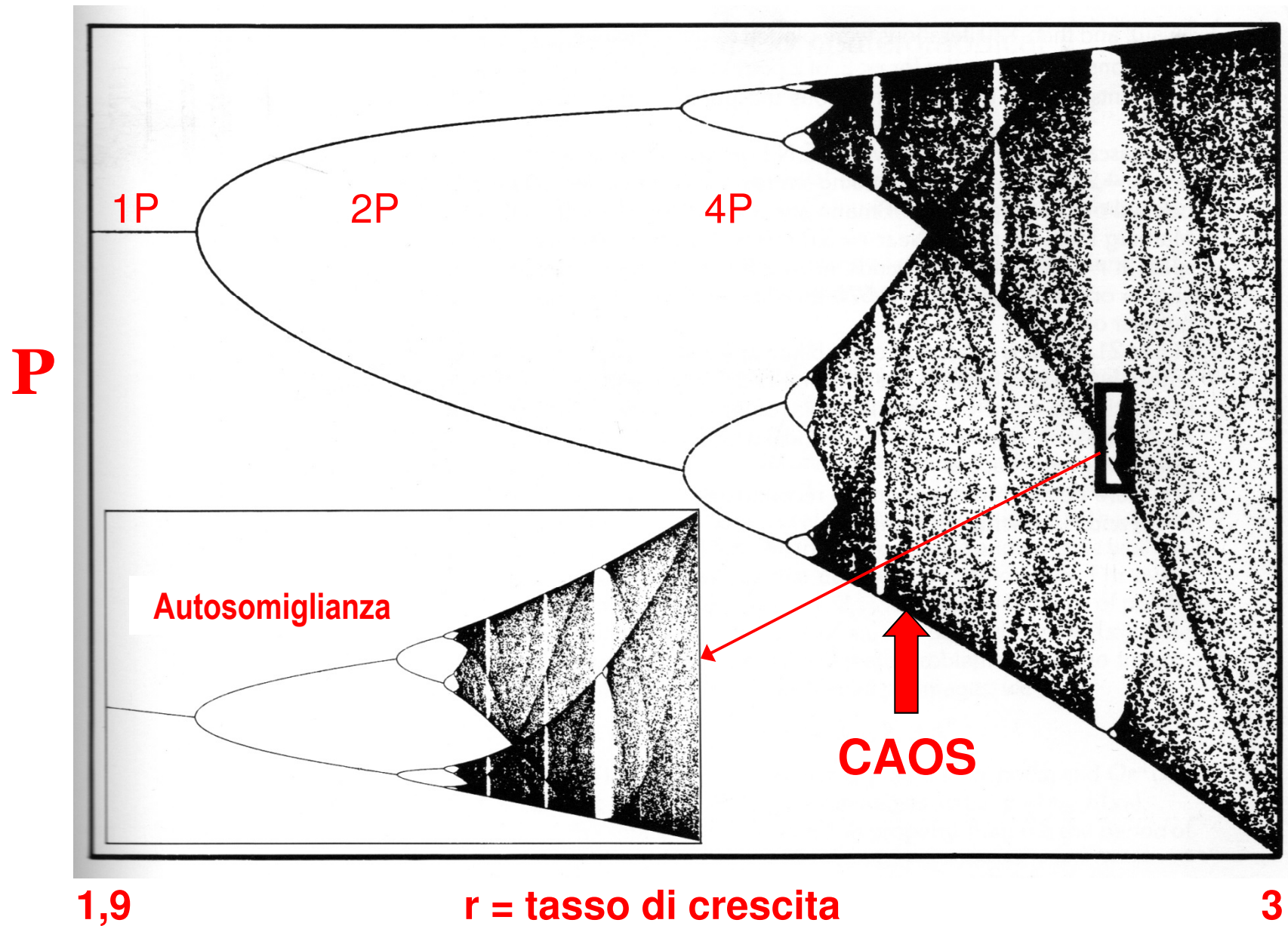


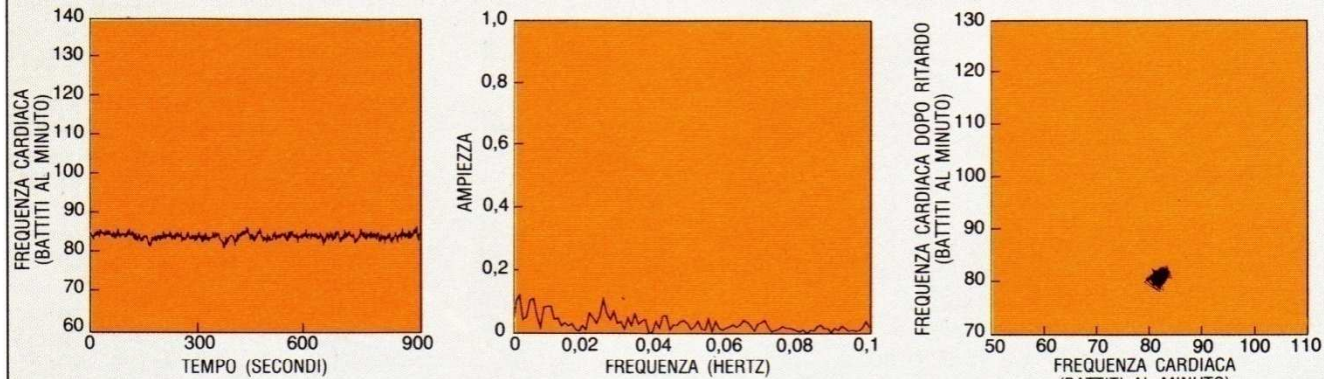
Fig. 20. $r=3$

1.10 Il caos 3 – La popolazione per un tempo...lungo



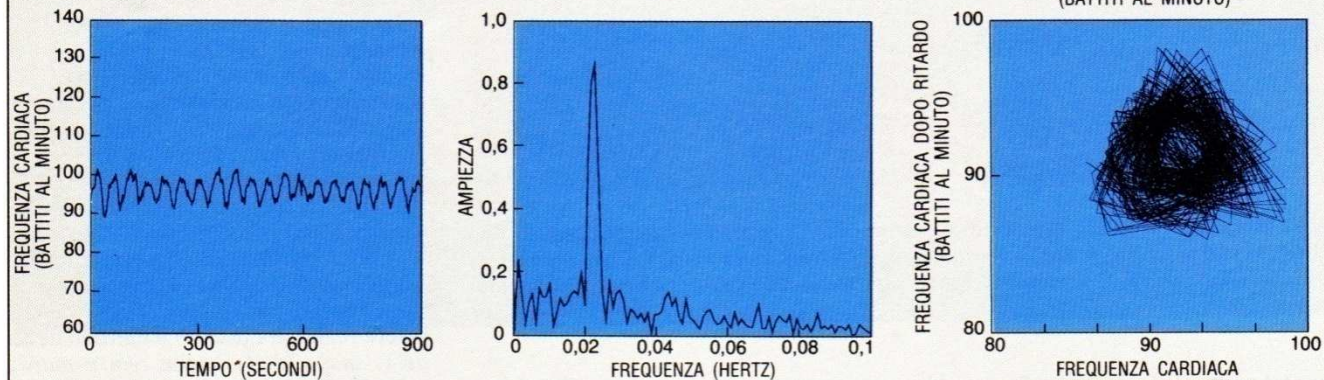
1.11 Il caos in natura – Il battito del cuore

A



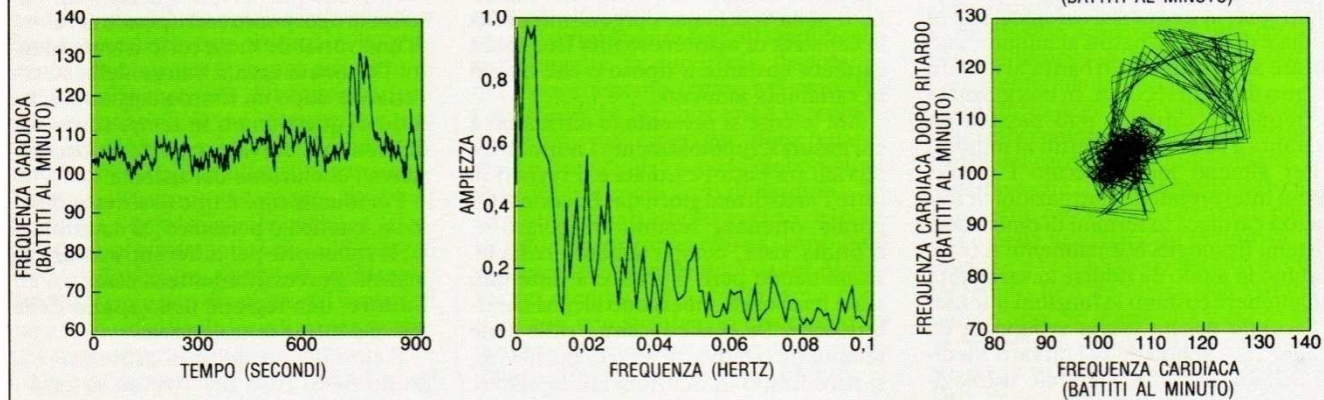
A: il paziente ha avuto un infarto dopo circa due ore ed è deceduto

B




B: Il paziente ha avuto un infarto dopo circa 12 ore

C



C: Il paziente è sano e non presenta problemi di cuore

3. Dal Caos a tutto il resto

- ❖ La teoria delle catastrofi (l'attacco di un cane – bulimia e anoressia)
- ❖ Strutture frattali (le arterie – le galassie). Molta informazione con formule semplici: $x_{n+1} = x_n^2 + c$
- ❖ Il mescolamento, o lo stiramento ed il ripiegamento geometrico (l'eruzione del Krakatoa – la preparazione della pasta sfoglia – , lo stiramento di Poincaré). 
- ❖ Fenomeni emergenti (le reti, Internet, il cervello)
- ❖ Il caos è necessario per l'evoluzione di sistemi molto complessi, per la diminuzione locale dell'entropia, per l'ordine, per l'informazione, per avere un mondo “divertente”.



23 marzo (?) 1927

PdI

W. Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik [Sul contenuto intuitivo della cinematica e della meccanica nella teoria quantistica]*, in *Zeitschrift für Physik*, vol. 43, n° 4, 1927

Il 23 marzo 1927 Werner Heisenberg scrive un articolo fondamentale che ha come oggetto l'interpretazione del formalismo matematico che sta alla base della Meccanica Quantistica e il significato da attribuire alle misure legate alla realtà che vogliamo descrivere.

I contenuti fisici della meccanica e della cinematica quantistica

La formulazione moderna:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{dove } \hbar = \frac{h}{2\pi} \cong 1 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

E' impossibile definire ad un certo istante *la posizione di una particella ed il suo momento** con un grado di accuratezza arbitrario

**[o altre coppie di grandezze fisiche] - Per Δx si intende l'incertezza statistica σ_x*

Due problemi da risolvere subito.1

1) Quale è la relazione “giusta”?

Libro/Articolo/Sito	Relazione x;p	Relazione E;t	Significato Δ
W. Heisenberg, 1927	$p_1 \cdot x_1 \sim h$	$E_1 \cdot t_1 \sim h$	p_1 = precisione di p...
W. Heisenberg, 1929	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$		Δ = indeterminazione / ind. media
E.H. Kennard, 1927	$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \hbar/2$	$\sigma_E \cdot \sigma_t \geq \hbar/2$	σ = deviazione standard
Wikipedia	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$	Δ = incertezza
Javorski, Manuale di Fisica	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$	Δ = scarto quadratico medio
Halliday -R. – K. Fisica 2	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$	Δ = larghezza pacchetto, larghezza a mezza altezza della distribuzione
L'Amaldi per i LS - blu	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$	Δ = indeterminazione
L'Amaldi per i LS	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$	Δ = indeterminazione // incertezza

Due problemi da risolvere subito. 2

2) "Principio" o "Relazioni" di Indeterminazione?

Tutti e due

- La relazione: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ è una conseguenza del formalismo matematico della Meccanica quantistica, può essere dimostrata.
- Questa relazione vale per tutte le coppie di grandezze che soddisfano una relazione del tipo $[x, p] = i\hbar$ (*difficile*).

$$[x, p]; [L_x, L_y]; [Q, \varphi]; \dots$$

- La relazione $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ invece NON può essere derivata da un'analogia relazione $[E, t] = i\hbar$, è assunta come vera in analogia ad alcune proprietà delle onde e ad alcune considerazioni formali... può essere considerata un principio.

Il significato della probabilità in MC/MQ



Meccanica Classica

La probabilità associata ad un evento è dovuta al fatto che, in genere, non conosco il valore di tutte le variabili del sistema.

Il lancio di un dado.
Il tiro con l'arco.

E' la cosiddetta probabilità «epistemica» cioè legata ad una mancanza di conoscenza.
Ma in teoria se potessi misurare tutto...
[Laplace].

Meccanica Quantistica

P1. La descrizione completa dello stato di un qualunque sistema, è data dalla funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ che rappresenta l'ampiezza di probabilità associata al sistema.

La funzione d'onda ci dà il massimo dell'informazione possibile su di un sistema, che può essere solo probabilistica.

E' la cosiddetta probabilità «non epistemica», cioè non è dovuta ad una mancanza di conoscenza dello stato iniziale di un sistema.

La probabilità è intrinseca alla realtà.
Ma allora niente è certo? NO... posso costruire sistemi con probabilità **1** di ottenere un certo risultato (il funzionamento di un cellulare)

Nota: Questa **NON** è l'indeterminazione...lo vedremo dopo.

I significati del Principio di Indeterminazione - 1a

1) **Versione soft o dell'azione a disturbo:**

Le relazioni di indeterminazione, stabiliscono che l'osservazione, per esempio, della posizione x di un oggetto microscopico altera in maniera non controllata il valore della quantità di moto $p=mv$ (della velocità assumendo $m = \text{costante}$) .

Questa è una conseguenza quasi naturale tenendo conto delle energie in gioco per i corpi microscopici, e della descrizione in termini di onda-particella di ogni "oggetto" fisico.

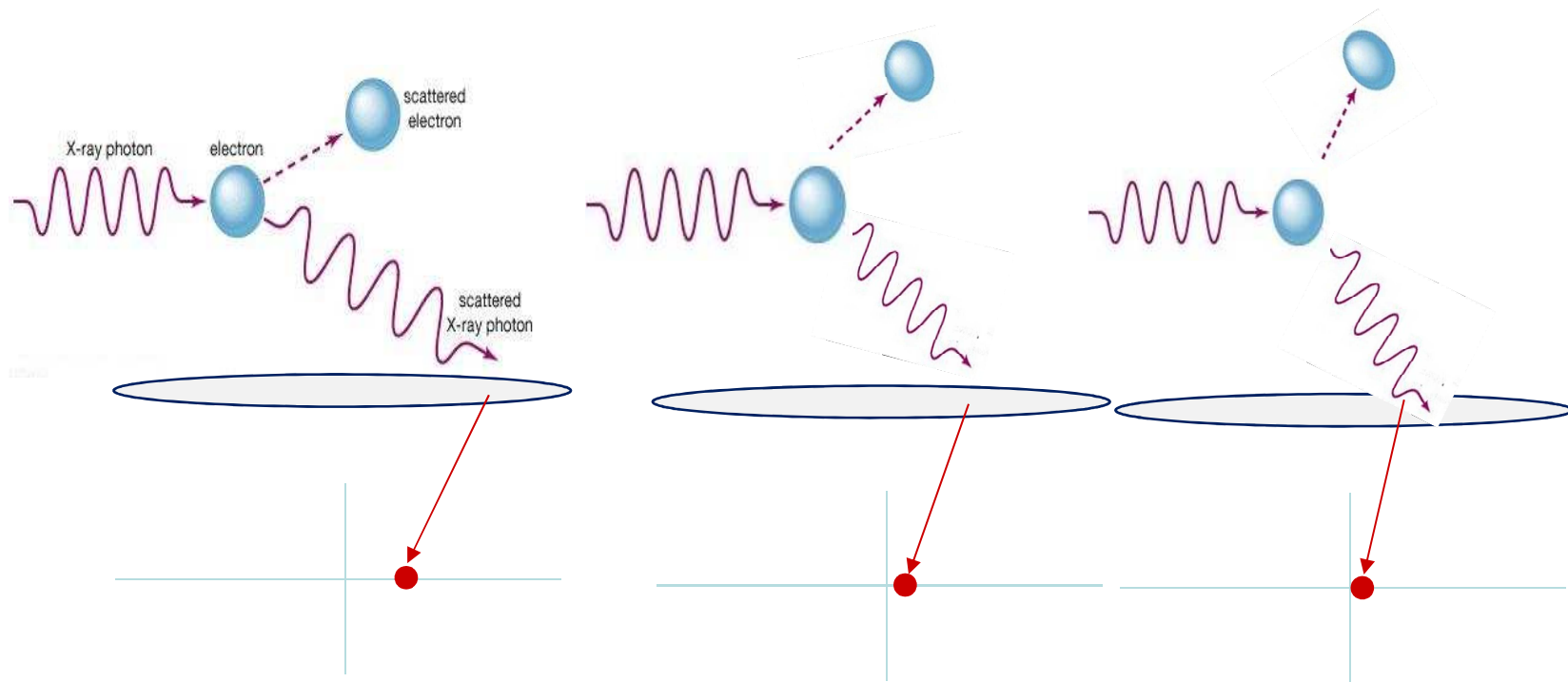
Esempio:

Supponiamo di voler misurare la posizione di un elettrone: dovremo «illuminarlo» inviando almeno un fotone su di esso e vedendo come e dove viene deflesso.

Questo processo provoca un rinculo dell'elettrone con un angolo ed una velocità arbitraria; quindi un'ipotetica misura di velocità fatta appena dopo l'urto darebbe un'informazione molto limitata sulla velocità che aveva l'elettrone prima che fosse investito dal fotone.

I significati del Principio di Indeterminazione – 1b

Misurare la posizione di un elettrone tramite un fotone.



Il fotone diffuso esce ogni volta con una direzione casuale (**perché questo prevede la meccanica quantistica**), un'energia casuale, e viene rivelato con un'incertezza che proibisce di ricostruire esattamente la posizione e la velocità iniziali dell'elettrone.

L'impossibilità di fare alcune misure, un calcolo – 1c

Esempio: misurare la posizione di un elettrone nell'atomo di Bohr [elettrone + protone]

Il raggio medio dell'orbita dell'elettrone è $r_0 \sim 0,52 \text{ \AA} = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

Per misurarne la posizione nell'orbita devo illuminarlo con un fotone di lunghezza d'onda più piccola di r_0 , diciamo almeno la metà...

Quindi $\lambda_{max} \sim \frac{r_0}{2} = 0,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, la frequenza del fotone sarà:

$$\nu = c/\lambda_{max} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$$

e la sua energia **$E(\text{fotone}) = h\nu = 8 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 5 \cdot 10^4 \text{ eV}$**

Ma l'energia di estrazione dell'elettrone nell'orbita 1s è **$E_e(1s) = 16,6 \text{ eV}$** !!!

Il fotone ha un'energia 3000 volte maggiore....l'elettrone viene catapultato fuori....non potrò mai sapere dove stava.

I significati del Principio di Indeterminazione – 1c

L'indeterminazione può essere derivata dal formalismo della MQ.

Meccanica Classica

Moto unidimensionale: $m(x, v_0)$ 

Newton: $F = ma \longrightarrow v(x,t) \longrightarrow \mathbf{x(t)}$

- Date le forze e lo stato iniziale possiamo calcolare l'evoluzione del sistema, la sua traiettoria nel tempo...

- Ad ogni istante potrò misurare

La posizione $x \dots\dots x \pm \Delta x$

La velocità $v \dots\dots v \pm \Delta v$

Il limite sarà dato, separatamente per ogni variabile, dall'apparato sperimentale.

Meccanica Quantistica

Un elettrone 

Eq. di Schrödinger $\hat{H}\psi(x, t) = E \psi(x, t)$

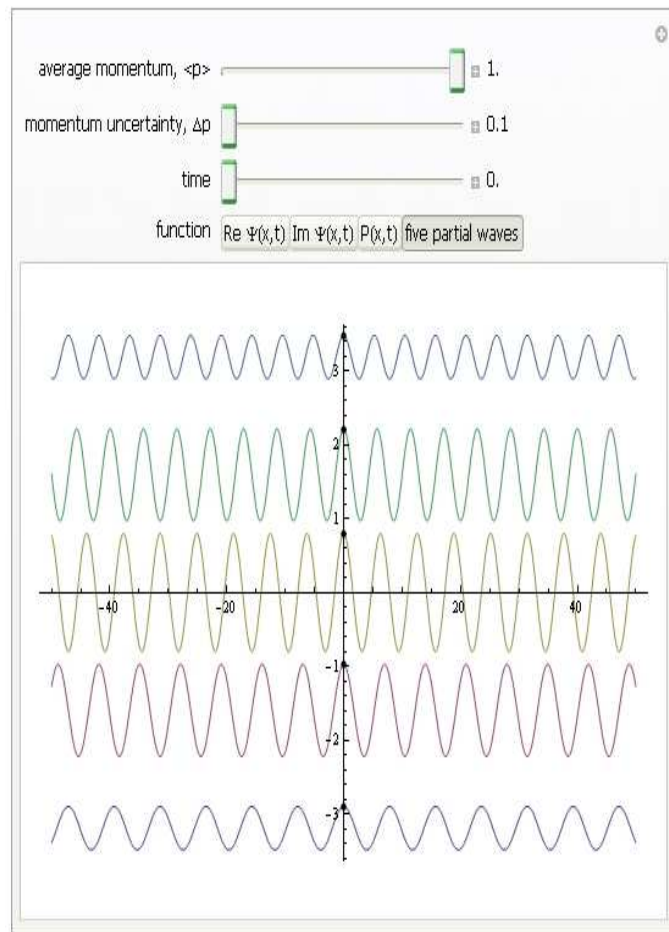
Il calcolo ci fornisce la "funzione d'onda" $\psi(x, t)$. Questa funzione «rappresenta» **tutto** quello posso sapere sul sistema in esame.

Ma perché si chiama funzione d'onda e come funziona?

Esempio di una funzione d'onda (molto semplificato). 1

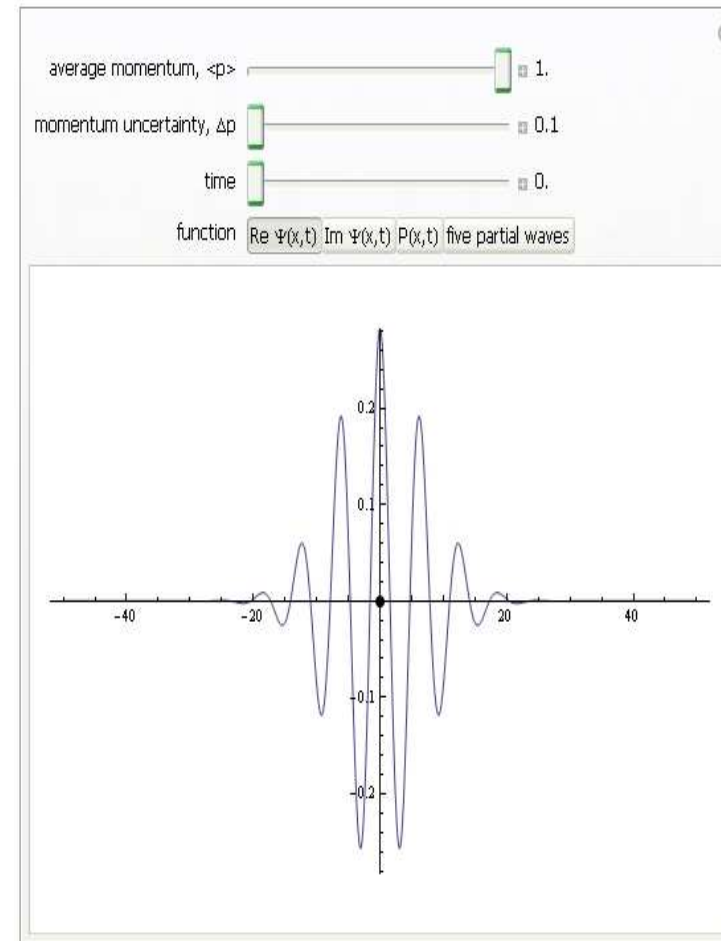
1. Qui vediamo le 5 onde che compongono una possibile funzione d'onda di una particella libera.
Ho 5 onde con frequenza, e ampiezza differente

Wavepacket for a Free Particle



2. Sommandole si ottiene **la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$** , il cosiddetto "pacchetto d'onda"

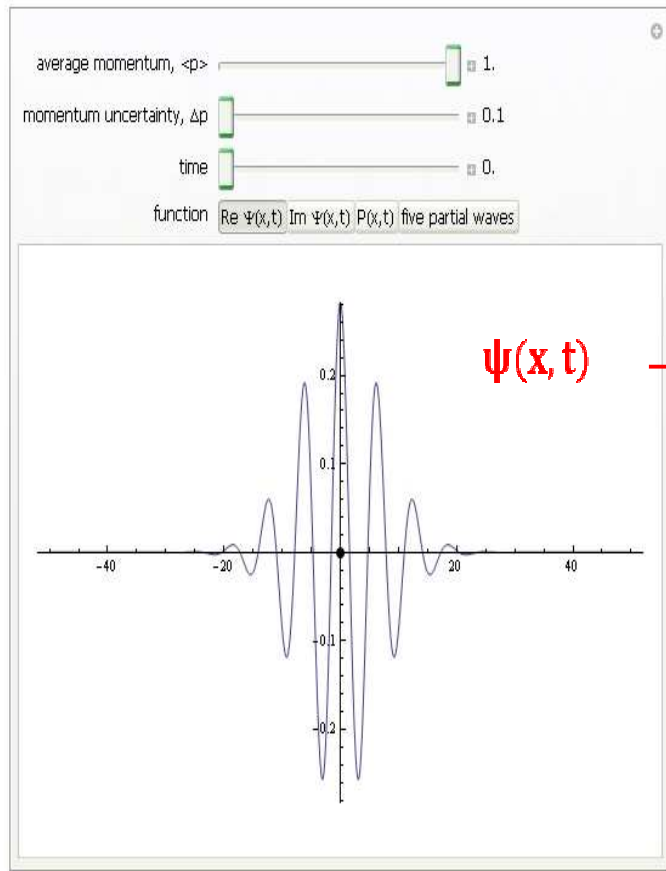
Wavepacket for a Free Particle



Esempio di una funzione d'onda (molto semplificato).2

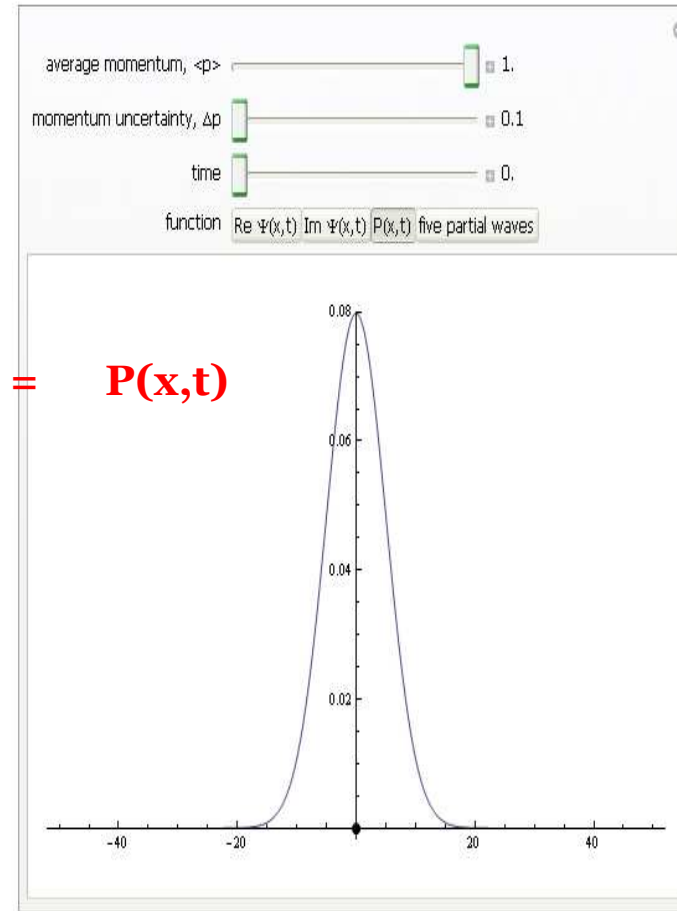
2. Sommandole si ottiene **la funzione d'onda $\psi(x,t)$**

Wavepacket for a Free Particle



3. Facendone il **modulo quadro** si ottiene **la distribuzione di probabilità** di trovare la particella nella posizione x

Wavepacket for a Free Particle



Esempio di una funzione d'onda (molto semplificato).3

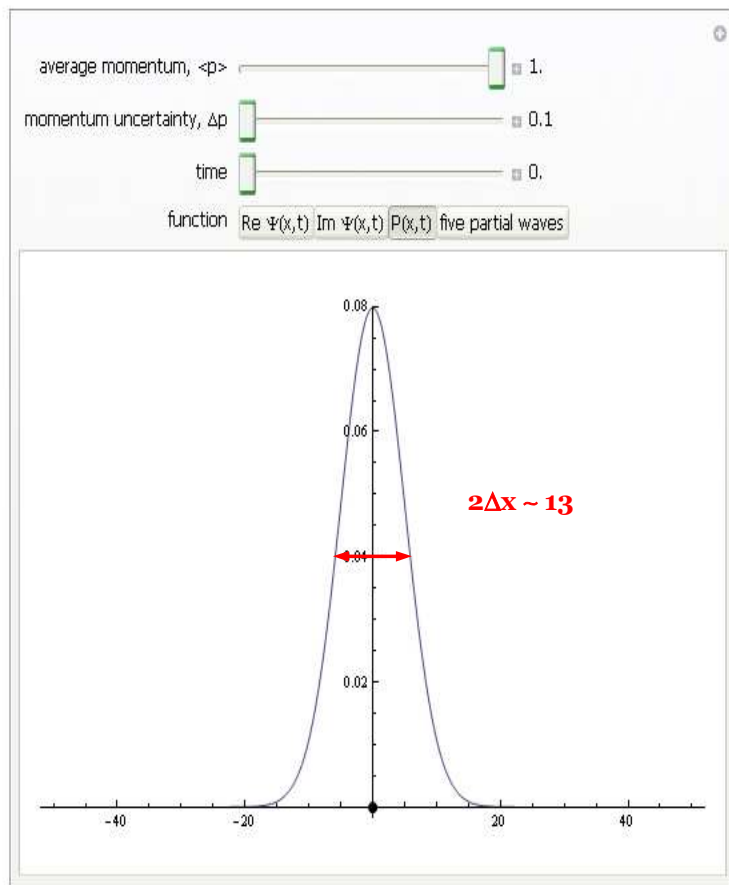
Calcolo di due distribuzioni di Probabilità per differenti incertezze su p.

Incertezza sul momento p: $\Delta p = 0,1$
Incertezza sulla posizione x : $\Delta x \sim 6,5$

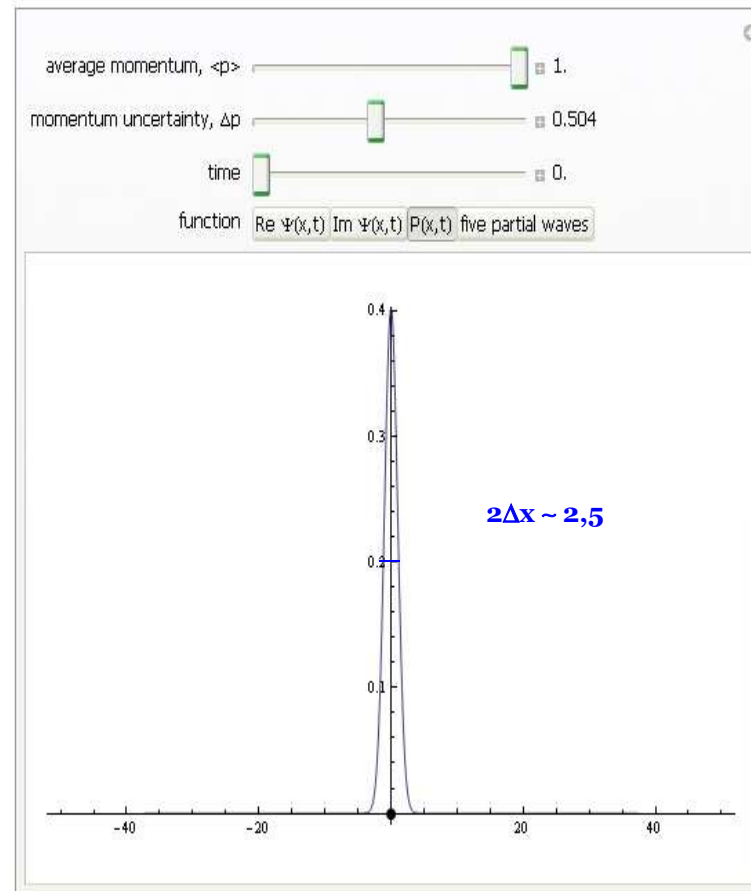
Incertezza sul momento p: $\Delta p = 0,504$
Incertezza sulla posizione x : $\Delta x \sim 1,25$

(Unità arbitrarie)

Wavepacket for a Free Particle



Wavepacket for a Free Particle



$\Delta x \Delta p \sim 6,5$

$\Delta x \Delta p \sim 6,3$

Il Pdl e le onde classiche

ANALOGIA CLASSICA (Attenzione è un'analogia!) con le onde "fisiche"

Le onde sonore emesse da uno strumento:

- se il suono è lungo posso individuare molte bene che nota sta suonando (i violini che accordano l'orchestra suonando una nota a lungo)...la frequenza....
- Se il suono è molto breve...è una somma di molte frequenze. Non posso accordare gli strumenti usando un colpo di tamburo.

Quindi:

- Se il suono è lungo non posso definire esattamente quando è stato emesso.
- Se il suono è breve non posso definire una frequenza precisa.

-La spiegazione corretta: un'onda può essere descritta

- dalla sua ampiezza: $f(x,t^*)$ mi da l'ampiezza dell'onda in funzione della posizione e del tempo, è la classica sinusoide per un'onda ad una sola frequenza.
- dalla sua trasformata di Fourier: $f(\omega,t^*)$... mi da l'ampiezza delle varie armoniche dell'onda.

Meccanica Classica: $\Delta f \cdot \Delta t \sim 1$

Meccanica Quantistica: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$

Ma le onde della Meccanica quantistica sono le funzioni d'onda... e il parallelo è legato al fatto che ad una particella posso associare un onda di $\lambda=h/p$

I significati del Principio di Indeterminazione – 2a

Versione hard o dell'indeterminazione intrinseca:

[W. Heisenberg *Physical Principles of Quantum Theory* (1929)]

«Questa relazione di incertezza specifica i limiti entro cui si può applicare la descrizione di particella. **Ogni utilizzo delle parole “posizione” e “velocità” con un'accuratezza che eccede quella data dall'equazione (1) è senza significato, come l'utilizzo di parole il cui significato non è definito.»**

L'indeterminazione nelle coppie $[x,p]$, $[E,t]$ [...,...] non è solo una conseguenza di un eventuale processo di misura, ma è una indeterminazione «intrinseca» del sistema fisico.

Per ogni sistema esistono coppie di grandezze fisiche che **non possiedono** contemporaneamente valori definiti, **indipendentemente dal fatto che vengano misurate o no!**

- Il sistema quantistico non è né un'onda né una particella. Quindi non posso usare, per descriverlo, i termini «posizione» e «velocità» con accuratezza infinita.
- Heisenberg: **le parole** posizione e velocità non hanno senso, non essendo definite.

I significati del Principio di Indeterminazione, un calcolo – 2b

Esempio:

Il calcolo – molto approssimato - del raggio della prima orbita dell'elettrone nell'atomo di Bohr (1s)

L'elettrone sente il potenziale elettrostatico generato dal protone a distanza r : $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

Supponiamo che l'elettrone sia confinato in una sfera di raggio r_0 (da determinare), quindi $\Delta r \sim r_0$

Il Pdl ci fornisce la minima indeterminazione su p : $\Delta p \geq \frac{\hbar}{r_0}$, quindi la sua energia cinetica sarà:

$$T_{\min} = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{r_0^2} \frac{1}{2m} \quad \text{e l'Energia totale: } E = T(r_0) + V(r_0) = \frac{\hbar^2}{r_0^2} \frac{1}{2m} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

questa funzione ha un minimo per $r_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m q^2} \sim 2,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

Il raggio dell'orbita dell'elettrone è fissato dal Pdl.....senza che nessuno lo guardi!

Perché gli effetti quantistici spesso non si vedono? Qualche calcolo

De Broglie dice che ad ogni corpo è associata un'onda...ma perché devo utilizzarla per calcolare cosa succede ad un elettrone in un atomo e non ad un pianeta intorno al Sole?

La lunghezza d'onda associata ad un corpo è: $\lambda = \frac{h}{mv}$ e gli effetti li vedo quando il corpo interagisce con oggetti delle dimensioni di λ .

Un'onda manifesta i fenomeni di interferenza e diffrazione quando interagisce con un oggetto delle stesse dimensioni della sua lunghezza d'onda.

La Terra: $\lambda = \frac{h}{M_T V_T} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{6 \cdot 10^{24} \cdot 30 \cdot 10^3} \cong 4 \cdot 10^{-63} \text{ m} \text{ !!!!!}$

Una palla da tennis: $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{60 \text{ g} \cdot 200 \text{ km/ora}} \cong 2 \cdot 10^{-34} \text{ m}$

Un granello di polvere da 1 μm : $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{10^{-15} \cdot 1 \text{ cm/s}} \cong 0,7 \cdot 10^{-16} \text{ m}$

Un elettrone (nell'atomo di H): $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{0,9 \cdot 10^{-30} \cdot 2,3 \cdot 10^6} \cong 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

...il diametro dell'atomo di H è circa $1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, la circonferenza $\cong 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} !$

Il Principio di Indeterminazione – Qualche calcolo. 1

Il P.d.I. $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$ Δx rappresenta l'incertezza che ho sulla x

Oppure, scrivendo $p=m \cdot v$, $\Delta x \cdot m \Delta v \geq \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{h}{2\pi m}$

Un esempio «classico»

Un granello di polvere con: $\varnothing \cong 1 \mu\text{m}$; $m \cong 10^{-15} \text{ kg}$; $v \cong 1 \text{ mm/s}$

Supponiamo di averlo fotografato con un microscopio, con una precisione $\Delta x = 0,1 \mu\text{m}$.

Quindi, per il P.d.I. , l'incertezza sulla velocità sarà almeno:

$$\Delta v \geq \frac{1}{\Delta x} \frac{h}{2\pi m} = \frac{1 \cdot 10^{-34}}{0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-15}} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m/s} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ mm/s}$$

Quindi l'incertezza esiste, ma è talmente piccola che non me ne posso accorgere, in ogni caso non avrò mai la possibilità di misurarla.

Dal punto di vista pratico il granello di polvere ha una posizione ed una velocità perfettamente definite.

Il Principio di Indeterminazione – Qualche calcolo. 2

Un esempio «microscopico»; sempre l'elettrone che gira intorno al protone

Un elettrone con: $v = 2 \cdot 10^6$ m/s

Supponiamo di aver misurato la velocità con un'incertezza del 10%:

$$\text{Quindi } \Delta v = 0,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}, \quad \Delta p = m \cdot \Delta v = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,2 \cdot 10^6 \cong 2 \cdot 10^{-25} \text{ kg m/s}$$

Quindi, per il P.d.I. , l'incertezza sulla posizione sarà almeno:

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi\Delta p} = \frac{0,5 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-25}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Il raggio di Bohr dell'elettrone è di circa $5 \cdot 10^{-11}$ m ...non riesco a sapere dove sta nell'orbita.

Il Pdl e le onde classiche

ANALOGIA CLASSICA (Attenzione è un'analogia!) con le onde "fisiche"

Le onde sonore emesse da uno strumento:

- se il suono è lungo posso individuare molte bene che nota sta suonando (i violini che accordano l'orchestra suonando una nota a lungo)...la frequenza....
- Se il suono è molto breve...è una somma di molte frequenze. Non posso accordare gli strumenti usando un colpo di tamburo.

Quindi:

- Se il suono è lungo non posso definire esattamente quando è stato emesso.
- Se il suono è breve non posso definire una frequenza precisa.

La spiegazione formale: un'onda può essere descritta come $f(x,t^*)$, oppure con la sua trasformata di Fourier $g(\omega,t^*)$. Queste due funzioni sono legate da una relazione matematica che impedisce la localizzazione nello spazio di un'onda ad una frequenza ben precisa.

Meccanica Classica: $\Delta f \cdot \Delta t \sim 1$

Meccanica Quantistica: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$

Ma le onde della Meccanica quantistica sono le funzioni d'onda... e il parallelo è legato al fatto che ad una particella posso associare un onda di $\lambda=h/p$



Evoluzione temporale della funzione d'onda, Schrödinger 1926



- A partire da una funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$, la sua **evoluzione temporale** è descritta in **modo completamente deterministico** dall'**equazione di Schrödinger**.

Es. Una particella di massa m (non relativistica), in presenza di un potenziale $V(r)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(\mathbf{r}) \cdot \psi$$

Esempio:

$V(r)$ potrebbe essere il potenziale Gravitazionale se la particella fosse sulla Terra: $V(r) = -G \frac{M_T}{R}$

- L'equazione di Schrödinger sostituisce la seconda legge della dinamica di Newton:

$$\bar{\mathbf{F}} = m\bar{\mathbf{a}} \quad - \quad \text{Esempio: la Forza Gravitazionale: } \bar{\mathbf{F}} = G \frac{mM_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

La MQ: cosa cambia rispetto alla Meccanica Classica



Meccanica Classica

- Un sistema è descritto da: massa, dimensioni, carica elettrica, colore, posizione, velocità.... Tutte queste grandezze sono misurabili.
- L'evoluzione del sistema è data dalle leggi di Newton, $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$... La previsione in teoria è deterministica, ma in casi particolari può essere caotica.
- Le caratteristiche di un sistema semplice possono essere misurate e conosciute con precisione arbitraria (quasi).

$$h=0$$

Meccanica Quantistica

- Un sistema è descritto **completamente** da una funzione d'onda $\psi(\mathbf{r},t)$, che **non è direttamente misurabile**. La $\psi(\mathbf{r},t)$ è legata alla probabilità di ottenere un certo risultato in una misura.
- L'evoluzione del sistema è data dalla equazione di Schrödinger. L'evoluzione della funzione d'onda è completamente deterministica.
- Un sistema non possiede alcune proprietà fin quando non vengono misurate. In ogni caso la precisione è limitata per questioni di principio.

$$h \neq 0$$

Dualità onda - particella

Particelle elementari come elettroni e fotoni mostrano una duplice natura, sia corpuscolare che ondulatoria.

In generale lo stesso oggetto fisico, ad esempio un elettrone, sarà:



Un'Onda con **lunghezza d'onda** $\lambda = h/p = h/mv$

Una Particella con massa **m**, posizione **r** al tempo **t** e impulso **$p = mv$**

Il **fotone** è oggetto fisico speciale, ha **massa a riposo = 0**.

E' **un'onda** con velocità **c**, frequenza **f**; lunghezza d'onda λ ; **$c = \lambda f$**

E' inoltre il **quanto di luce (la particella elementare della luce)** e la sua energia vale: **$E = hf$** , e il suo impulso è **$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{c}f$**

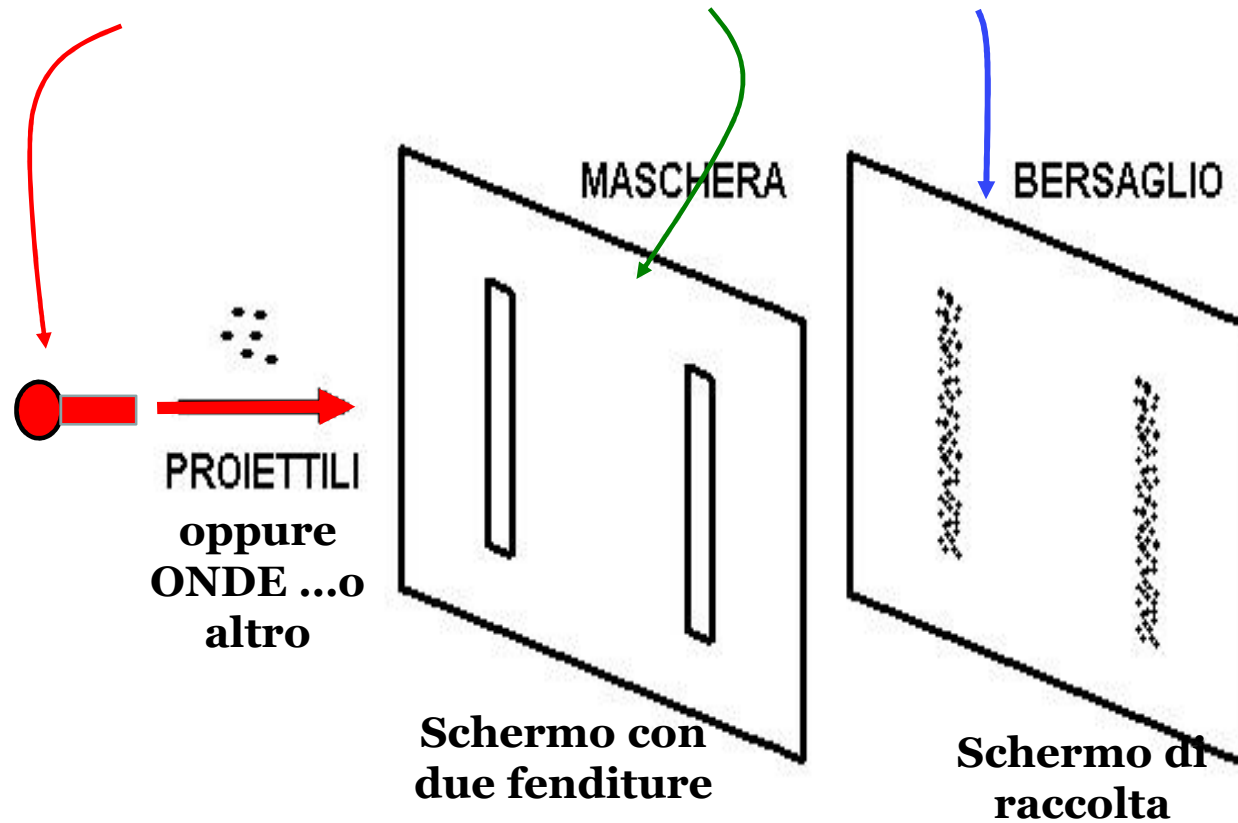
Un esperimento «strano», tipicamente quantistico.

[da R. Feynmann]



Il sistema su cui facciamo l'esperimento:

Una **sorgente** // Uno schermo con due **fenditure** // uno **schermo** di raccolta



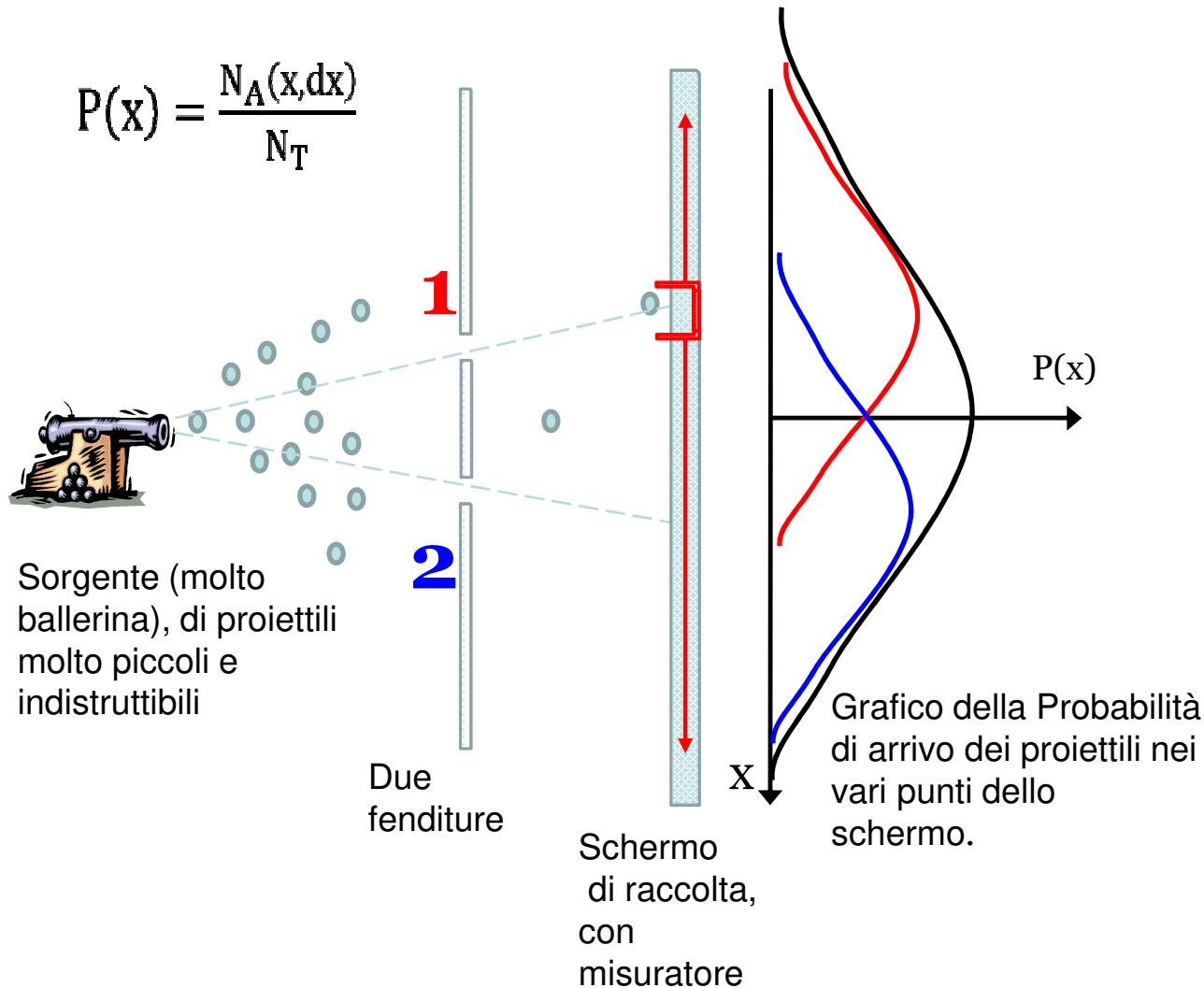
Si può vedere anche in rete: PHET...tanti altri siti.

1. Sparo proiettili indistruttibili



Conto i proiettili arrivati nei vari punti dello schermo – calcolo la probabilità $P(x)$

$$P(x) = \frac{N_A(x, dx)}{N_T}$$



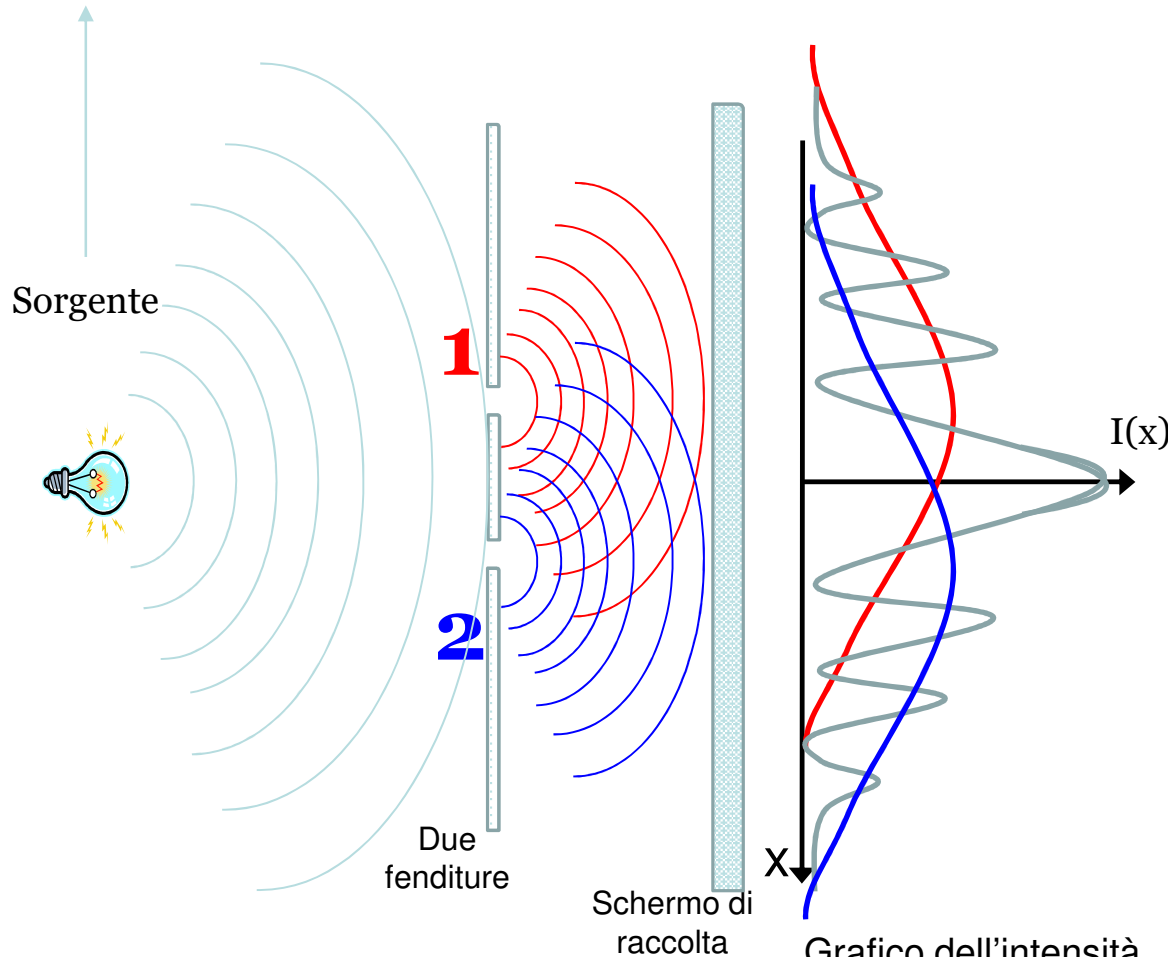
1. Aperta solo la fenditura 1: P_1
2. Aperta solo la fenditura 2: P_2

- Aperte tutte e due: $P(1,2)$
- Le Probabilità si sommano
- $P(1,2) = P_1 + P_2$
- I proiettili o passano da una parte, o passano dall'altra

1. La sorgente genera onde – Misuro l'intensità I



Ampiezza dell'onda: $A(r, t) \sim A_0 \cos(kr + \omega t)$; Intensità: $I(x) = A^2(x)$



1. Aperta solo la fenditura 1: I_1

2. Aperta solo la fenditura 2: I_2

- Aperte tutte e due:
 $I = A^2 = (A_1 + A_2)^2$

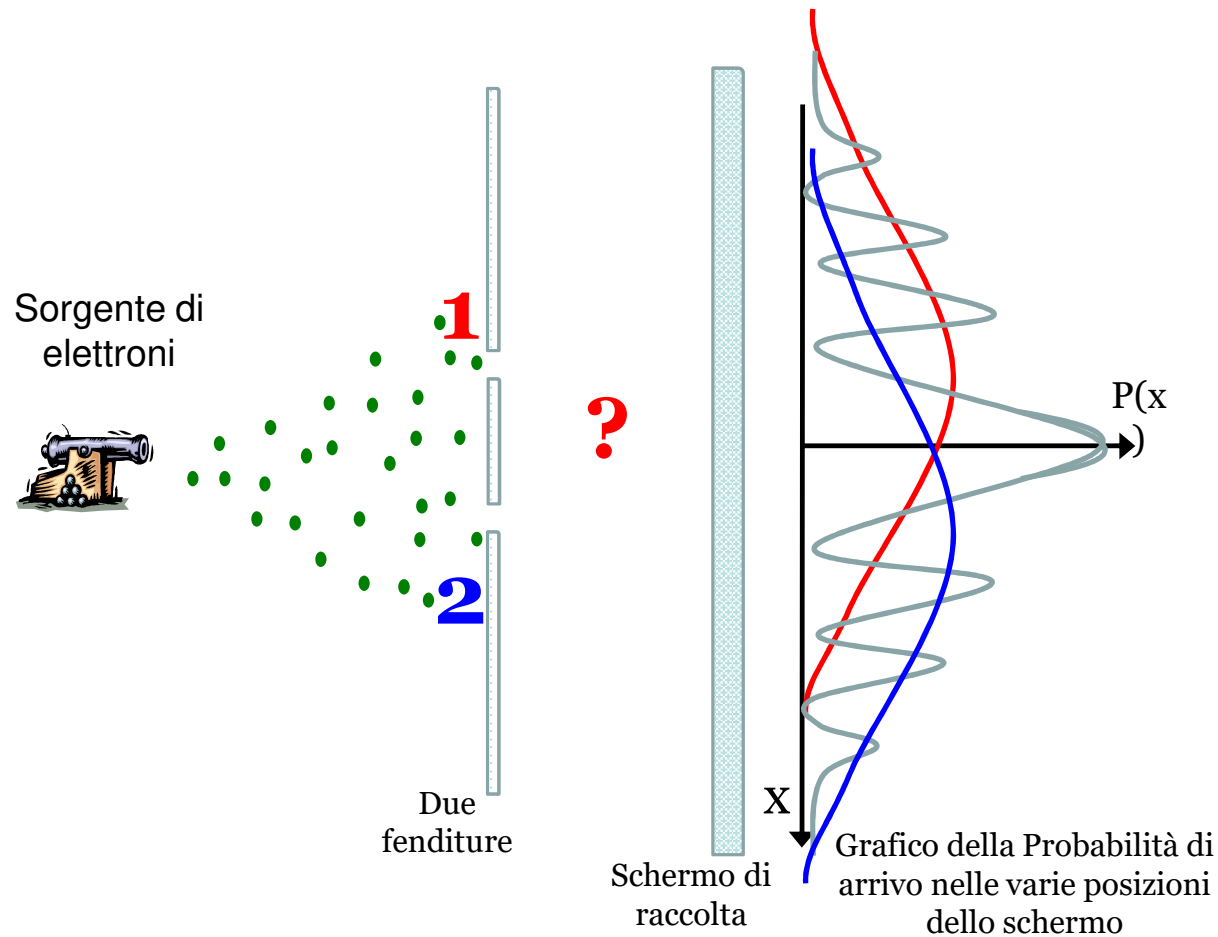
C'è interferenza!

- Le Ampiezze si sommano
- L'intensità è il quadrato di A
- C'è interferenza.
- L'onda passa da una fenditura **E** dall'altra.

Grafico dell'intensità nelle varie posizioni dello schermo.



1. La sorgente spara elettroni **singoli** – Conto gli elettroni



1. Aperta solo la fenditura 1: P_1

2. Aperta solo la fenditura 2: P

- Aperte tutte e due: P
C'è interferenza!

?

Come è possibile?

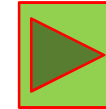
- L'interferenza c'è solo con le onde, che passano da entrambe le fenditure.
- Gli elettroni arrivano uno ad uno e sono indivisibili!

Perché vedo l'interferenza con gli elettroni



Ma sono sicuro che gli elettroni sono delle particelle che arrivano uno per volta?

Sì, sento il click del contatore...vedo l'immagine sulla lastra. [Tonomura]



Quello che succede è che gli elettroni sono descritti dalla loro funzione d'onda...all'uscita dalle due fenditure ci sono le due f.d.o. ψ_1 e ψ_2 .

La probabilità di trovare un elettrone sullo schermo è data dal quadrato della f.d.o totale..... $P \propto (\psi_1 + \psi_2)^2$e la somma di onde dà interferenza.

Quindi gli elettroni si comportano come onde, quando passano attraverso le fenditure....e come particelle quando vengono rivelate.

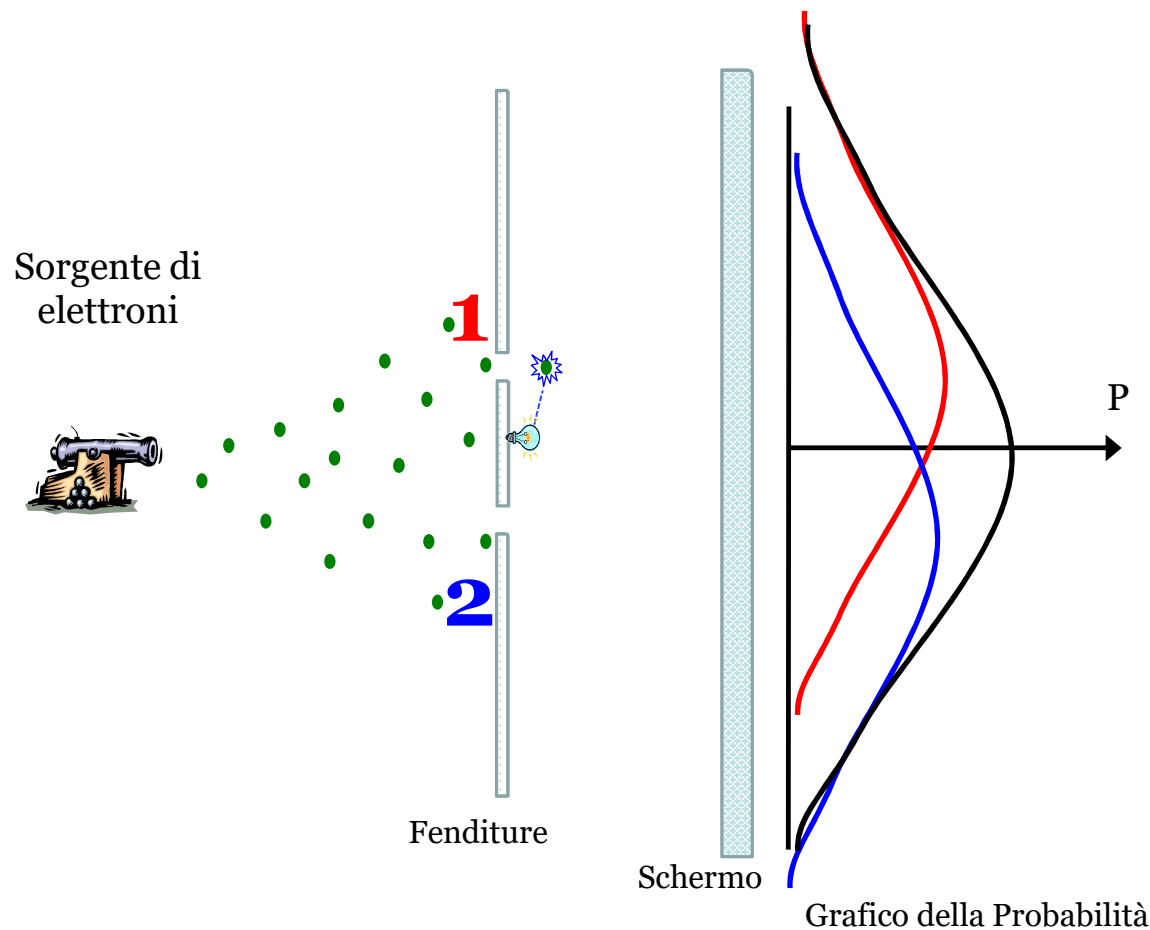
Ma l'elettrone è indivisibile, da dove passa veramente?

Posso provare a guardarlo?

Guardiamo gli elettroni:



Mettiamo una lampadina vicino alle fenditure: se passa un elettrone viene illuminato, io faccio la fotografia e vedo da dove è passato.



1. Aperta solo la fenditura
1: **P1** – (li fotografo)

2. Aperta solo la
fenditura 2: **P2**
(foto)

- Aperte tutte e due: **P (foto)**

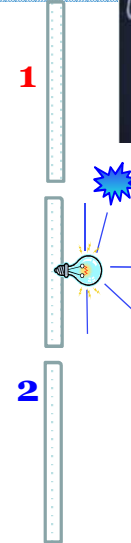
L'interferenza è sparita!

Ora so bene da dove passa ogni singolo elettrone, o passa da una fenditura, o passa dall'altra, ma non ho più interferenza.

PERCHE'?

Guardiamo gli elettroni - II

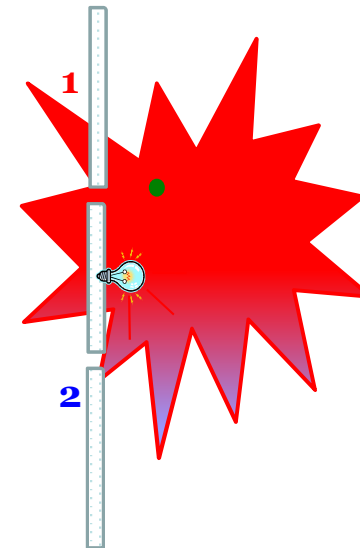
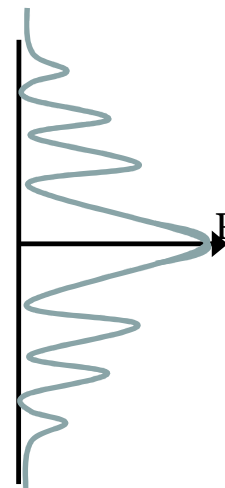
Ma certo che non vedo l'interferenza! se illumino l'elettrone gli mando fotoni con una certa energia $E=hf$, questi fotoni colpiscono l'elettrone, lo «disturbano», lo spostano...in ogni caso modificano il suo cammino, le relazioni di fase che caratterizzano l'interferenza non sono più valide...e vedo solo la somma delle Probabilità....



Ma allora posso fare una cosa: diminuire l'energia del fotone, cioè diminuire la sua frequenza, passo da $E=hf$ (blu), a $E=hf$ (rossa)...quindi lo disturberò molto poco. Ottimo, proviamo: vedo l'interferenza?

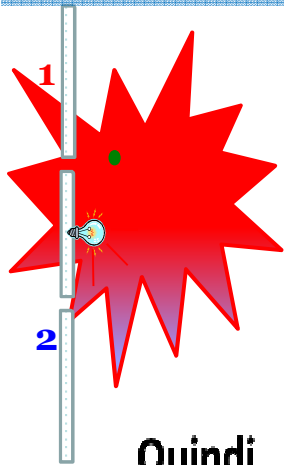
Si! L'interferenza è ritornata:

E ora andiamo a vedere le foto, per sapere da dove sono passati i singoli elettroni:



Il lampo non è localizzato...non riesco a sapere dove sta l'elettrone!

Guardiamo gli elettroni - III



Certo! La luce rossa ha meno energia $E=hf$, quindi non disturba gli elettroni, ma la sua frequenza f è minore...quindi la lunghezza d'onda è maggiore...e la risoluzione spaziale è legata alla lunghezza d'onda (è il potere risolutivo in ottica: $\Delta x \approx \lambda$).

Così vedo l'elettrone, ma non posso sapere da dove è passato...

Quindi

- Se non guardo l'elettrone...si comporta come un'onda...vedo l'interferenza.
- Se lo guardo per vedere dove sta, e uso una luce opportuna...l'interferenza sparisce e si comporta come una particella.
- Se lo guardo...ma non riesco a sapere dove sta...si comporta come un'onda.

E se provo a fare i calcoli per sapere cosa devo fare per «vederlo» scopro che tutto è coerente con il Principio di Indeterminazione...

$$\Delta x \cdot \Delta v \geq \hbar/m$$

Se lo vedo bene Δx è piccola, ma Δv è grande... e l'interferenza sparisce.

Se vedo l'interferenza $\rightarrow \Delta v$ è piccola, ma allora Δx è grande, e non posso sapere dove sta.

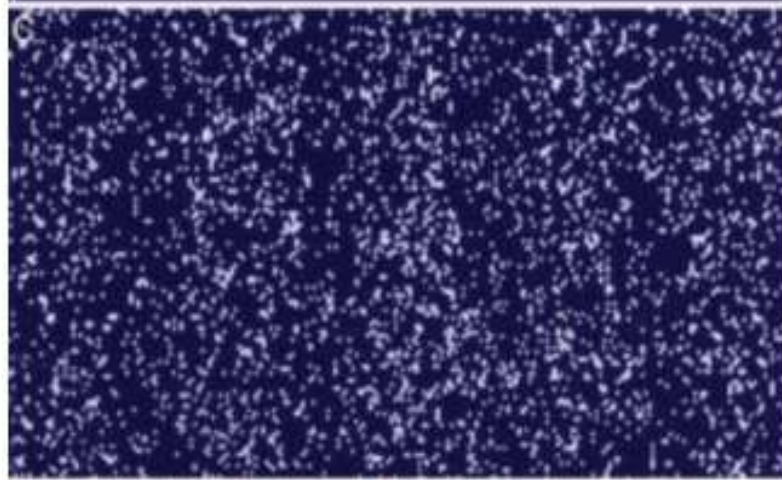
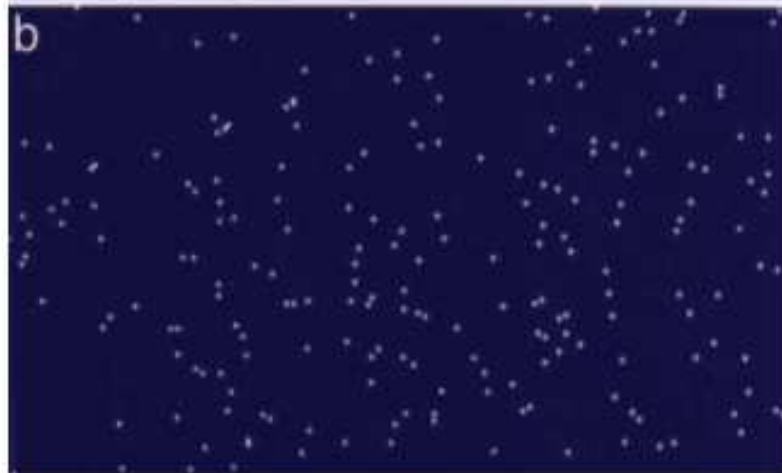
Heisenberg – le due fenditure



Per concludere: non posso chiedermi dove sta l'elettrone, se voglio mantenere le sue caratteristiche di onda.

Tutto questo era legato al fatto che io volevo misurarlo...ma se non lo misuro?
Non cambia niente, una sistema quantistico NON può avere contemporaneamente le due proprietà posizione e velocità con precisione arbitraria. Oppure [Energia, Tempo]





**Numero di
elettroni sullo
schermo**

10

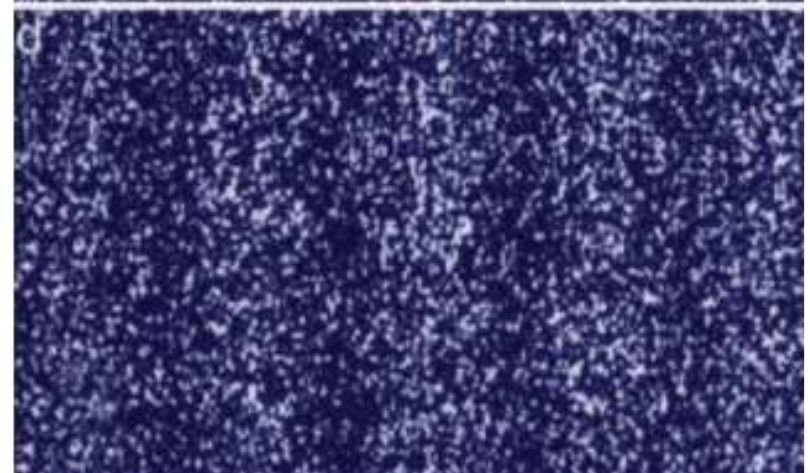
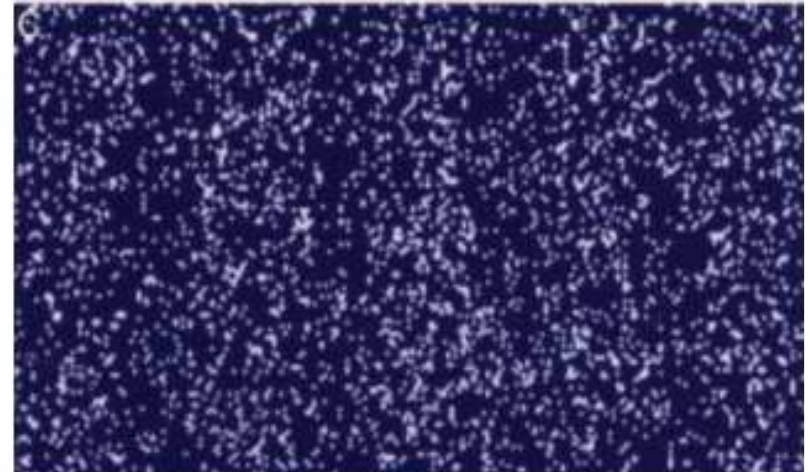
6'000

200

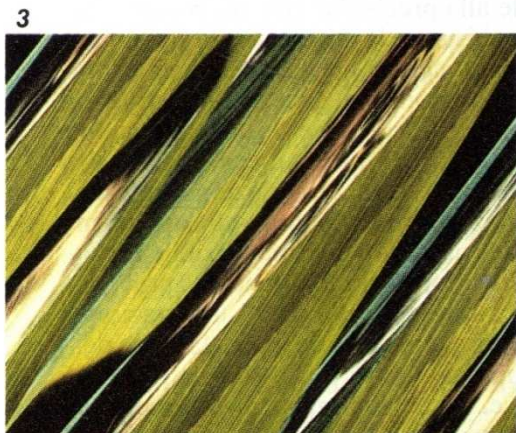
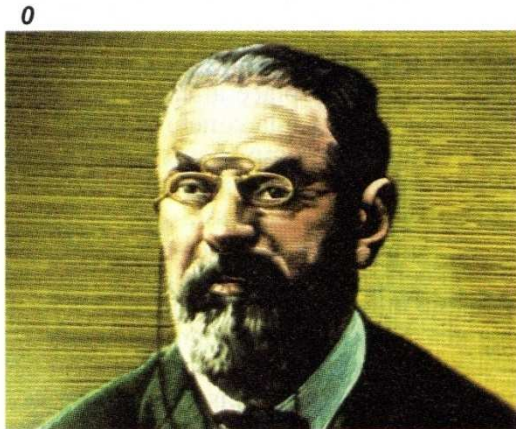
40'000

6'000

200'000



Stiramento Poincaré 1



Stiramento Poincaré 2

7



10



18



47



48



237



239



240



241

